Справка на най-важните постижения и тяхното значение

Стефан Иванов

Нелинеен Геометричен Анализ

1. Един от най-значимите ми резултати, съдържащ се в студията под номер [S1] (*Memoirs Amer. Math. Soc., 2014*) и в публикациииите под номера [44] (*J. Eur. Math. Soc., 2010*), [53] (*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 2012*) и [76] (*Analysis & PDE, 2023*), съвместни с Д. Василев и моят защитил докторант и вече доцент, доц. Иван Минчев, е намирането на всички екстремални функции в неравенството от Соболев тип на Фоланд-Щайн за кватернионните групи на Хайзенбер и определянето на кватернионно контактната константа на Ямабе за стандартните 3-Сасакиевите сфери, за чието изследване са необходими нови геометрично-аналитични методи, развити и използвани в цитираните по-горе статии (Приложение3, Приложение4).

Ще отбележа факта, че в света са известни екстремалите на неравенството от Соболев тип на Фоланд-Щайн само за Евклидовото пространство, комплексните групи на Хайзенберг, получени от Д. Джерисън и Дж. Лии, и новите екстремали за кватернионнинте групи на Хайзенберг получени от Иванов, Минчев и Василев.

2. Развивайки геометрията на кватернионно контактните многообразия, съвместно с Д. Василев, откриваме в публикацията под номер [45] (*Journal de Mathe'matiques Pures et Applique'es (2010)*), нова тензорна инварианта на кватернионно-контактната структура, характеризираща локално плоските кватернионно контактни многообразия, като доказваме, че анулирането на този инвариантен тензор е необходимо и достатъчно условие едно кватернионно-контактно многообразие да бъде локално кватернионно изоморфно на кватернионната група на Хайзенберг и като следствие да бъде локално кватернионно изоморфно на 3-Сасакиевата сфера. Този резултат е потвърден и доказан по различен метод от Дж. Алт (Приложение 2).

Ще отбележа, че в световната математика са известни само три такива тензора - тензорът на Вайл, характеризиращ локално конформно плоските Риманови пространства (теорема на Вайл), тензорът на Черн-Мозер, характеризиращ локално CR-плоските CR-многообразия (теорема на Черн-Мозер), и тензорът намерен от Иванов и Василев определящ локално плоските кватернионно контактни многообразия (теорема на Иванов-Василев).

3. Основна цел на отбелязаните по-горе резултати е приложението им за решаването на кватернионно контактният проблем на Ямабе, именно за компактно кватернионно контактно многообразие съществува ли кватернионно контактен изоморфизъм така, че новата кватернионно контктна структура да има константна скаларна кривина на Бикард. В статията [71] (*Journal de Mathe'matiques Pures et Applique'es (2018)*), съвместно с моят защитил докторант и вече доцент, доц. Александър Петков доказваме, че кватернионно контактният проблем на Ямабе за компактно кватернионно-контактно многообразие, което не е локално сферично, т.е. описаният по-горе тензор на Иванов-Василев да не е тъждествено нула, винаги има решение.

Тук, за разлика от Римановият проблем на Ямабе и CR-проблемът на Ямабе, където случаите n=4 за римановия и n=3 за CR се нуждаят от допълнителни разглеждания в нашият случай на кватернионно контактният проблем на Ямабе това не е необходимо. Този факт няма задоволително обяснение но може би една причина е, че теоремите на Х.Вайл и Черн-Мозер за анулиране на съответните тензори на Вайл и Чърн-Мозер не важат за съответните размерности докато резултатът на Иванов-Василев за кватернионно-контактни многообразия важи за всички размерности.

4. Изследвайки и анализирайки свойствата на суб-лапласиана в кватернионно контактни многообразия, съвместно с Д. Василев и успешно защитилият ми докторант- доц. А. Петков, намираме в публикаците под номера [57] (*Journal of Geometric analysis*) и [61] (*Nonlinear analysis-Theorey (2013)*) формула от Бохнеров тип и като приложение, в компактния случай, даваме точна оценка отдолу за собствените числа на суб-Лапласиана, която се достига от 3-Сасакиевата сфера. Установяваме, че при достигане на равенство в тази оценка суб-Хесиана на екстремалната собствена функция няма безследна част. Формулираме хипотезата, че измежду всички компактни кватернионно контактни многообразия равенството се достига само за 3-Сасакиевата сфера и установяваме тази хипотеза в частния случай на компактни 3-Сасакиеви многообразия. В студията под номер [63] (*Journal of Spectral Theory*) доказваме тази хипотеза в общия случай за размерност по-голяма от 7, именно пълно спрямо естествената Риманова метрика кватернионно контактно многообразие с размерност по-голяма от 7 допускащо нетривиална функция с нулева безследна част на хоризонталният й хесиан е квтернионно контактно изоморфно на 3-Сасакиевата сфера.

Резултатите и новите методи в тази област, намирането на ново доказателство на теоремата на Черн-Мозер, характеризираща локално плоските CR-многообразия както и намирането на ново доказателство на формулата на Джерисон-Ли са отразени в съвместната ми с Д. Василев монография [M1], (*Extremals of the Sobolev inequality and the quaternionic contact Yamabe problem, World Scientific Publishing Co., Lecture Notes, 2011* и обзорната студия [O1] (*Nonlinear Analysis-Theory (2015)*).

Струнни теории и геометрия

Една от главните движещи сили в науката в момента е теорията на струните, опитваща да обедини теорията на Айнщайн за гравитацията с другите три взаимодействия – силно, слабо и електромагнитно. Оказва се, че в този грандиозен проект особено важна роля играят най-значителни постижения на математиката в области като диференциалната и алгебрична геометрия, диференциалните уравнения, групите и алгебрите на Ли и др.

Решения на уравненията за движение в класическата вече теория за гравитацията във вакуум са Риманови многообразия със специална холономия: като многообразията на Калаби-Яу (компактни Келерови Ричи-плоски многообразия) като за доказване съществуването им С.-Т. Яу получава филцова премия; компактни Риманови многообразия с холономия групата G_2 или групата $Spin(7)$ (пространства на Джойс). Известен математически факт е, че уравненията за движение са следствие от запазването на суперсиметрията, т.е. съществуване на паралелен спинор води до Ричи-плоска метрика.

При наличие на силови полета уравненията за суперсиметрията и уравненията за движение се променят което води до промяна на геометрията на решенията, търсят се Риманови многообразия с метрична свързаност с напълно антисиметрична торзия, чиято холономия се съдържа в групите $SU, Sp, G_2, Spin(7)$, удовлетворяващи модифицираните уравнения за суперсиметрята и съответните уравнения за движение. В този случай, уравненията за суперсиметрията не влекат уравненията за движение. За непротиворечивост на ситемата, уравненията за суперсиметрията се допълват от уравнение за анулиране на аномалията, като за хетеротичната струнна теория системата е предложена от К. Хул и А. Стромингер през 1986 г., известна като системата на Хул-Стромигер, и изследвана от водещи учени като С.-Т. Яу, А. Стромингер и др.

Първите компактни нетривиални решения в размерност 6 на уравненията за запазване на суперсиметрията и уравнението за анулиране на аномалията (система на Хул-Стромингер) за хетеротичната струна с нетривиално силово поле, нетривиален дилатон и нетривиален инстантон са построени от Джун Ли и С.Т. Яу и Дж. Фу и С.-Т. Яу в периода 2004-2008 г, като проблемът е сведен до доказване на съществуване на решение на нелинейно частно диференциално уравнение като решението е в неявна форма.

5. Фундаментален проблем в хетеротичната струнна теория е изборът на подходяща свързаност върху допирателното разслоение на базовото многообразието, чиято форма на Понтрягин участва в уравнението за анулиране на аномалията. Един от най-значимите ми резултати в тази област е теоремата доказана в публикацията под номер [51] (*Phis. Lett. B, 2010*) показваща, че решенията на системата уравнения за суперсиметрията както и анулирането на аномалията (известна като система на Хул-Стромингер) са решения на уравненията за движение в хетеротичната теория, във важните за теорията размерности 5,6,7 и 8, точно когато неопределената свързаност върху базовото многообразие е инстантон, т.е. кривината й се съдържа съответно в групите $SU(2), SU(3), G_2$ и $Spin(7)$. **Важността на тази теорема в размерност 6 се определя от теоремата на Джун Ли и С.-Т. Яу, която твърди, че върху компактно ермитово разслоение съществува единствена инстантонна свързаност. Комбинацията на двата резултата определя еднозначно изборът на неизвестната свързаност върху допирателното разслоение на базовото многообразието в уравнението за анулиране на аномалията в размерност 6. Тази теоремата, известна вече като теорема на Иванов е предоказана и обобщена за всички размерности от Д. Мартели и Дж. Спаркс (Adv. Theor. Math. Phys. 15 (2011)) и отново от Ксения де ла Оша и Ерик Сванс (JHEP 1410 (2014) 123).**

Това дава основание на Доунг Фонг, Себастиан Пикард и Ксианвен Цанг (Surveys in Differential Geometry 2017. Celebrating the 50th anniversary of the Journal of Differential Geometry, 331-364, Surv. Differ. Geom., 22, Int. Press, Somerville, MA, 2018, arXiv:1806.11235) да нарекат системата на Хул-Стромингер с инстантонна свързаност система на Хул-Стромингер-Иванов (Hull-Strominger-Ivanov sistem). (Duong H. Phong,

Geometric flows from unified string theories, Contribution to Surveys in Differential Geometry, Vol. 27 (2022), **Forty Years of Ricci flow** ***, edited by H.D. Cao, R. Hamilton, and S.T. Yau, arXiv:2304.02533.*** (Приложение5, Приложение6, Приложение11).

6. В публикацията под номер [47] (*Comm. Math. Phys.*), съвместна с М. Фернандез, Л. Угарте и Р. Вилякампа, построяваме първите известни в световната литература експлицитни компактни решения в размерност 6 на уравненията за движение на хетеротичната струна с нетривиално силово поле, постоянен дилатон и нетривиален инстантон. Тези примери са нетривиални решения в размерност 6 на уравненията за запазване на суперсиметрията и уравнението за анулиране на аномалията (система на Хул-Строминггер-Иванов) за хетеротичната струна с нетривиално силово поле, постоянен дилатон и нетривиален инстантон, които същевременно са решения на уравненията за движение на хетеротичната струна. **Тези резултати се цитират от водещи специалисти в областта като С.-Т. Яу и съавтори (Comm. Math. Phys. 289 (2009), (2023)), както и от Дж. Фу в доклада си по покана на Международния Конгрес по математика в Хайдерабат, Индия 2010 и др.** В публикацията под номер [62] (*Journal of High Energy Physics*) съвместна с М. Фернандез, Л. Угарте Д. Василев намерихме експлицитни компактни сингулярни 6-мерни решения на уравненията за движение на хетеротичната струна с нетривиално силово поле, нетривиален инстантон и непостоянен дилатон удовлетворяващи уравненията за движение на хетеротичната струна до втори ред на струнната константа (string tension) като дилатона се задава от реални слайсове на известната функция на Ваерщтрас. Физическата природа на тази изненадваща връзка на хетеротичните уравнениа на движение с елиптични функции предстои да бъде установена.

Трябва да се отбележи, че компактните нетривиални решения в размерност 6 на уравненията за запазване на суперсиметрията и уравнението за анулиране на аномалията (системата на Хул-Строминггер) за хетеротичната струна с нетривиално силово поле, нетривиален дилатон и нетривиален инстантон построени от Джун Ли и С.Т. Яу и Дж. Фу и С.-Т. Яу в периода 2004-2008 г, не удовлетворяват уравненията за движение за хетеротичната струна, тъй като тези автори използват свързаност върху допирателното разслоение, която не е инстантон, и съгласно теоремата на Иванов от предната точка 5, решението не удовлетворява уравненията за движение на хетеротичната струна.

7. В публикациите под номера [48] (*Advances in Theoretical and Mathematical Physics*) и [50] (*Nuclear Physics B*) съвместни с М. Фернандез, Л. Угарте и Р. Вилякампа, построяваме първите известни в световната литература експлицитни компактни нетривиални решения в размерности 5, 7 и 8 на уравненията за запазване на суперсиметрията и уравнението за анулиране на аномалията за хетеротичната струна с нетривиално силово поле, постоянен дилатон и нетривиален инстантон, които същевременно са решения на уравненията за движение на хетеротичната струна. **Методите от [48] за конструиране на решения на системата на Хул-Строминггер-Иванов, които са и решения на уравненията за движение на хетеротичната струна бяха обобщени съвсем наскоро от Ксения де ла Оша, Магдалена Ларфорс и Матю Магил, Adv. Theor. Math. Phys. 26 (2022) както и от**

Jason D. Lotay, Henrique N. Sa Earp, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B 10 (2023), като решението от [48] е описано отново в първата работа като илюстрация пораждаща това обобщение и това решение е провокирало изследвания във втората,(Приложение7, Приложение12). В публикацията под номер [67] (*Communications in Mathematical Physics, 2015*), съвместна с М. Фернандез, Л. Угарте и Д. Василев намерихме експлицитни компактни сингулярни решения в размерности 7 и 5 на уравненията за движение на хетеротичната струна с нетривиално силово поле, нетривиален инстантон и непостоянен дилатон удовлетворяващи уравненията за движение на хетеротичната струна до втори ред на струнната константа (string tension), а дилатона се задава от реални слайсове на известната функция на Ваерщтрас като физическата природа на тази изненадваща връзка на хетеротичните уравнениа на движение с елиптични функции не е известна и досега.

8. Теоремата за несъществуването на компактни комплексни многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение, т.е. с нулев първи клас на Черн, паралелна спрямо свързаността на Бисмут-Стромингер комплексна форма на обема и $\partial\bar{\partial}$-затворена степен на Келерова форма, различни от многообразията на Калаби-Яу, установена съвместно с Г. Пападопоулос в публикациите под номера [23] (*Phis. Lett. B, 2001*) и [25] (*Class. Quantum Grav., 2001*) и [58] (*Advances in Mathematics, 2013*) се интерпретира, съгласно изследванията на А. Стромингер, като теорема за несъществуване на решения на суперсиметричните струнни теории от тип II със затворена 3-форма на силовото поле, които не са Калаби-Яу. Тази важна теорема води до търсене на нови модификации в теорията на струните от тип II. За важността и значението на този резултат говорят цитирания (общо 237 известни на мен цитата) от водещи математици и физици като С.-Т. Яу (Харвард)-филцов лауреат, Ганг Тян (Принстън), Саймон Саламон (Кралски Колеж-Лондон), Йозеф Полшински (Санта Барбара), Джером Гаунтлет (Императорски Колеж-Лондон) и др (Вж. цитирания на [23], [25] и [58] от Списък на цитирания).

Риманови, Почти Ермитови, Почти контактни, G_2 и $Spin(7)$ многообразия

9. В съвместната с М. Фернандез, В. Муньос и Л. Угарте публикация под номер [41] (*J. London Math. Soc., 2008*) са дефинирани специални структури (приблизително хипо структури) върху 5-мерни почти-контактни многообразия. Дадена е обща конструкция за получаване на 6-мерни приблизително келерови некомпактни многообразия, които се получават от приблизително хипо структура чрез решаване на ситема обикновени диференциални уравнения. Като следствие от тази обща конструкция са дадени нови примери на некомпактни 6-мерни приблизително келерови многообразия. Ще отбележа, че са известни само четири примера на компактни приблизително келерови 6-мерни многообразия и въпросът дали съществуват и други компактни примери беше открит доскоро: **именно, прилагайки и доразвивайки нашия метод Foscolo and Haskings, (Annals of Mathematics, 185 (2017), no. 1, 59-130) построиха нови нехомогенни компактни приблизително Келерови многообразия в размерност 6,** (Приложение8).

10. В съвместната с М. Фернандез и В. Муньос работа под номер [69] (*Ann. Scuola. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 2019)* е намерена топологична инварианта (формалност) за 7-мерни компактни 3-Сасакиеви многообразия като е установено, че те са формални точно когато второто число на Бетти е по-голямо от единица. С помоща на тази теорема е даден пример на 7-мерно Сасаки-Айнщайново многообразие недопускащо 3-сасакиева структура, което е пионерски резултат откриващ нова насока на изследвания.

11. В съвместните ми с Т. Фридрих публикации под номера [28] (*Asian J. Math., 2002*) и [31] (*J. Geom. Phys., 2003*) са открити необходими и достатъчни условия за съществуване на метрична свързаност с антисиметрична торзия, запазваща дадена G_2 структура и е доказано, че тази свързаност е единствена, като е дадена явна формула за торзията ѝ. Формулирани са необходими и достатъчни условия за съществуване на решение на първите две уравнения за запазване на суперсиметрията в струнните теории в размерност 7, гравитино и дилатино уравненията, при наличие на точно една суперсиметрия (съществуване на точно един паралелен спинор), и е пресметната скаларната кривина на решението. Тези резултати се явяват пионерски в това направление, известни са ми 282 цитата на [28] и 101 цитата на [31] (Вж. цитирания на [28] и [31] от Списък на цитирания).

12. Установено е, в публикациата под номер [30] (*Mathematical Research Letters, 2004*), изненадващият факт, че за всяко $Spin(7)$ многообразие съществува единствена свързаност запазваща $Spin(7)$ структурата, която има антисиметрична торзия. За торзията на тази свързаност е написана явна формула. Формулирани са необходими и достатъчни условия за съществуване на решение на първите две уравнения за запазване на сърерсиметрията в струнните теории в размерност 8, гравитино и дилатино уравненията, при наличие на точно една суперсиметрия (съществуване на точно един паралелен спинор). За компактни $Spin(7)$ многообразия, които са локално конформно еквивалентни на пространства на Джойс е установено, че индекса на елиптичен оператор е нула и е дадена линейна връзка между числата на Бети. Тези резултати се явяват пионерски в теорията на хетеротичните струни в размерност 8, известни са ми 85 цитата на [30] (Вж. цитирания на [30] от Списък на цитирания). **Тази свързаност е наречена от Висенте Муньос и Карлос Шахбаци, Rev. Math. Phys. 32 (2020), no. 5, 2050013, 47 pp. , Свързаност на Иванов (Ivanov connection).** (Приложение9).

13. Установеният и доказан в съвместната ми с Р. Клейтон публикацията под номер [34] (*Comm. Math. Phys., 2007*) резултат, че компактно G_2-многообразие със затворена фундаментална 3-форма, чийто тензор на Вайл е с нулева дивергенция (в частност, и когато многообразието е Айнщайново) е пространство на Джойс, т.е. фундаментална 3-форма е паралелна спрямо Римановата свързаност. **Тази теорема отговоря на въпроса за съществуване на компактни Айнщайнови G_2-многообразия със затворена фундаментална 3-форма, поставен в математиката от световно известният математик Р. Браянт (Zbl 1115.53018), както и от едни от водещите учени в областта на теоретичната физика, М. Цветич, Г. Гибонс, Г.Лу и К.Попе (Nucl. Phys. B638 (2002))**, (Приложение1).

14. В съвместната с Т.Фридрих публикация под номер [29] (*J. Reine Angew. Math., 2003*) са намерени необходими и достатъчни условия за съществуване и единственост на метрична свързаност с антисиметрична торзия, запазваща дадена почти контактна метрична структура и е пресметната торзията ѝ. За компактни почти контактно метрични многообразия с антисиметричен тензор на Нюенхойз и Килингово фундаментално векторно поле е доказана теорема от типа на класическата теорема на Тачибана за K-контактните многообразия. Формулирани са нови конформни трансформации на почти контактна метрична структура.

15. В съвместната с П. Годюшон публикация под номер [11] (*Math. Zeitschrift, 1997*) отговаряме отрицателно на въпрос поставен от Н. Хитчин в Math. Reviews 1981, 81e/53052, дали съществуват комактни Айнщайн-Ермитови метрики върху компактни комплексни повърхнини, за които е известно, че не допускат Айнщайн-Келерови метрики, като установяваме, че ако компактна комплексна повърхнина допуска Айнщайн-Ермитова метрика то тя е или Айнщайн-Келерова или повърхнина на Хопф.

16. В съвместната с И. Петрова публикация под номер [13] (*Geometriae Dedicata, 1998*), са разгледани и локално класифицирани 4-мерните Риманови многообразия с точково-постоянни собствени стойности на оператора на Римановата кривина, като е даден нов нетривиален пример. Този нетривиален пример породи нова област за изследване в случаите на многомерни Риманови многообразия и псевдо-Рименови многообразия. **Тази работа е цитирана в 5 монографии, като ще отбележа монографиите на световно известният математик М. Берже**, *Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century* както и *A panoramic view of Riemannian geometry*, (Вж. цитиранията на [13] в Списък с цитирания).

17. В съвместната ни с успешно защитилият ми докторант-покойният доц. Симеон Замковой, публикация под номер [35] (*Differential Geometry and its Applications, 2005*) изграждаме теорията на свързаностите върху пара-Ермитовите и пара-кватернионните многообразия. Доказваме параермитов аналог на известната теорема на Голдберг-Сакс за Лоренцово многообразие (теорема на Голдберг Сакс за неутрална метрика със сигнатура (2,2)). Дефинираме приблизително пара-Келеровите многообразия, за които доказваме, че в размерност 6 те са Айнщайнови, но за разлика от приблизително Келеровите многообразия, Ричи плоският случай не може да бъде изключен. Даваме примери на приблизително пара-Келерови многообразия и поставяме въпросът за съществуване на Ричи плоски приблизително пара-Келрови пространства в размерност 6. Положителен отговор на този въпрос беше даден от Висенте Кортес и Ларс Шефер, (J. Lie Theory 19 (2) (2009)). Известни са ми 122 цитирания на статията [35] като едно е в **Annals of Mathematics vol. 186 (2017).**

18. В съвместната с Давиде Барилари публикация под номер [72] (*Calc. Var. and PDE, (2019)*) е дадена топологична характеристика за компатните кватернионно контактни многообразия с размерност по-голяма от 7 (теорема от тип Боне-Майерс), именно, доказано е, че компактно кватернионно контактни многообразие с размерност по-голяма от 7, което е пълно спрямо естествената суб-Риманова метрика и удовлетворява естествени от тип на Ричи условия за положителност е компактно и е дадена точна горна граница за неговият суб-Риманов диаметър, която се достига за 3-Сасакиевата сфера.

19. Опитвайки се да създаде единна теория на гравитацията и електромагнетизма А. Айнщаин разглежда многообразия с несиметрична метрика (не-симетрична теория на гравитацията - НТГ), като симетричната част е неизродена и описва грвитацията а несиметричната част-електромагнетизма и търси свързаност, която не запазва несиметричната метрика, но удовлетворява така нареченото метрично условие на Айнщайн и торзията ѝ е 3-форма. В съвместната с М. Златанович статия [74] (Class. Quant. Grav., 2020) установяваме факта, че в размерност 5, съществуването на тази свързаност е еквивалентно на факта, че 5-мерното многообразие е Сасаки-Айнщаново. Това би могло да се окаже интересно тъй като показва, че може би съществува връзка между Айнщановата НТГ и AdS/CFT съответствието между суперсиметричната теорията на струните и конформните теории на полето, тъй като Сасаки-Айнщайновите многообразия са свързани с решения на тези теории.

20. Известно е, че Айнщайново Риманово многообразие с размерност по-голяма от две е с константна скаларната кривина. За компктно Риманово многообразие с неотрицателен тензор на Ричи, Де Лелис и Топинг оценяват отклонението на скаларната от константност с интеграл от безследният тензор на Ричи умножен с константа зависеща от размерността. За компактно силно псевдоизпъкнало CR многообразие аналогичен резултат за скаларната кривина на Танака-Вебстер е доказан от Чен, Саотоме и Ву като е използвано условие за положителност, при което първото собствено число на суб-Лапласиана е винаги по-голямо от това на Сасакиевата сфера. В съвместната с А. Петков работа [77] (*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 2023*) ние оценяваме отклонението на тази скаларна кривина от константност като използваме друго важно условие за положителност, което участва в CR неравенството на Кордес. Двете условия за положителност съвпадат за Сасакиеви многообразия, като показваме, че нашата оценка е по-добра от оценката получена от Чен, Саотоме и Ву. Оценки за отклонението на скаларната кривина на Бикар от константност за компактно кватернионно контактно многообразие намираме в съвместната работа [78] (*Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Fis. Nat. Ser. A. Mat., (2023).*

Приносите отбелязани в точките 10., 18., 19. и 20 както и основната част от 1. са през последните 5 години, в периода 2019-2024г.

Известни са ми 1445 цитирания на резултатите от споменатите по-горе трудове като 476 цитирания са през последните 5 години, 2019-2024.

Ще спомена и цитирания в топ списания по математика и теоретична физика, от които в 4-те най-силни списания по математика в света:

- Inventiones Math.vol 209 (2017) - цитат 41 на 47
- Annals of Mathematics, vol. 185 (2017) - цитат 28 на 41, цитат 36 на 12,
- Annals of Mathematics vol. 186 (2017) - цитат 78 на 35;
- Journal of the AMS vol. 30 (2017) - цитат 42 на 33;
- Comm. Pure Appl. Math. vol. 77 (2024) - цитат 23 на 62 и цитат 64 на 47;

Както и цитирания в:

Journal Diff. Geom. (2019, 2021, 2022); J. Math. Pures. Appl. (2023); Adv. Math (2021, 2022); Journal fur the reine und angewande math. (Crelles Journal) (2019, 2021, 2023); Transaction of the AMS (2017, 2020, 2023), Mathematische Annalen (2017, 2019, 2022, 2023); Proc. London Math. Soc. (2022); Comm. Partial Diff. Equations (2016), Annali di Matematica Pura ed Applicata (2017, 2022), Ann. Sci. Norm Super. Pisa (2016); JHEP (2019,2021,2022); Comm. Math. Phys. (2022, 2023, 2024), Nuclear Phys. B (2018) и др.