Кратко описание на най-важните научни постижения на проф. дмн Петър Бойваленков за участие в конкурс за член-кореспондент на БАН, 2024

1. Необходими и достатъчни условия за оптималност на границите на Левенщейн.

През 1996 г. в работата [1] (съавторите Даньо Данев и Силвия Бумова по това време бяха студенти във ФМИ, мои дипломанти) е доказана следната теорема.

Theorem 3.1 *The bound $L_m(n,s)$ can be improved by a polynomial from $A_{n,s}$ of degree at least $m+1$ if and only if $Q_j(n,s) < 0$ for some $j \geq m+1$. Moreover, if $Q_j(n,s) < 0$ for some $j \geq m+1$, then $L_m(n,s)$ can be improved by a polynomial from $A_{n,s}$ of degree j.*

Тази теорема дава необходими и достатъчни условия за глобална оптималност на границите на Левенщейн (вид локална оптималност е известна от 1980 г.). С други думи, теоремата дава необходими и достатъчни условия за съществуването на полиноми, подобряващи съответните граници на Левенщейн. Тези условия са изследвани в същата статия, а метод за конструирането на подходящи полиноми е предложен преди това в [2] (както и дисертацията ми през 1993; вж. също [10]). Теоремата е обобщена през 1998 г. за полиномиални метрични пространства в работата [3].

Важността на Теорема 3.1 беше отбелязана от самия Левенщейн, който включи обобщението за полиномиални метрични пространства в главата [4], която написа за Handbook of Coding Theory, като Теорема 5.47 (с по-кратко, но по-същество нашето доказателство). В книгата [5] Ериксон и Зиновиев включиха теоремата като Теорема 2.6.1 (с доказателството от [1]), а & 2.6 е озаглавен "The Boyvalenkov-Danev-Bumova criterion".

Аналози на Теорема 3.1 за универсални граници за енергии на сферични кодове бяха доказани през 2016 г. в работата [6] (втората част на Теорема 3.1), на кодове в Хемингови пространства в [7] и през 2019 г. за енергии на кодове в полиномиални метрични пространства в работата [8]. Подобен резултат беше доказан и от Кон-де Корси-Айрланд в [9] през 2018 г. Интересна следваща стъпка е предложена от Сардари-Заргар [17].

Работата [1] има 44 независими цитирания (19 от тях в Скопус и по 1 в монографиите [18, 4, 5]).

2. Универсални граници за енергии и поляризации на кодове и дизайни.

2.1. Energy bounds

В работата [6] е развита техника и е доказана следната универсална долна граница за енергии на сферични кодове.

Theorem 3.1 *Let n, N be fixed and $h(t)$ be an absolute monotone potential. Suppose that $\tau = \tau(n, N)$ is as in (18), and choose $k = \lceil \frac{\tau+1}{2} \rceil$. Associate the quadrature nodes and weights α_i and ρ_i, $i = 1, \ldots, k$, as in (21). Then*

$$\mathcal{E}(n, N; h) \geq R_\tau(n, N; h) := N^2 \sum_{i=1}^{k} \rho_i h(\alpha_i). \tag{1}$$

Moreover, the polynomials defined by (i), respectively by (ii), provide the unique optimal solution of the linear program (11) for the subspace $\Lambda = \mathcal{P}_\tau$ and consequently,

$$\mathcal{W}(n, N, \mathcal{P}_\tau; h) = R_\tau(n, N; h).$$

Универсалността на границата (1) е в смисъла на Левенщейн [4] и се проявява (допълва) и в някои други аспекти. Всъщност това са безбройно много граници, които се получават по един и същи начин, а възлите на оптималност α_i и теглата ρ_i не зависят от потенциала h (такива, абсолютно монотонни, потенциали има неизброиво много). Нещо повече, границата се достига тогава и само тогава, когато се достига границата на Левенщейн и, в частност, се достига от всички универсално оптимални конфигурации от работата на Кон-Кумар [11] от 2007 г. с изключение на 600-клетката. По този начин горната теорема и свързаните с нея резултати от [6, 8, 13] обединяват разбиранията за униваралност на Левенщейн от 1990-те и на Кон-Кумар [11] от 2007 и някои следващи статии на Кон и съавтори.

В монографията [12] Глава 5 е посветена на границите на линейното програмиране за енергии на сферични кодове и на универсално оптималните сферични кодове, като & 5.5 и 5.6 развиват теорията и доказват границата (1) (вж. Теорема 5.6.5).

Техниките от [6] бяха развити и използвани от авторите за получаване на нови универсални граници за кодове с фиксирани диаметър и мощност [13, 15], както и за обобщение на границите на Левенщейн [14, 10, 15]. Основните резултати за универсални граници бяха пренесени и обобщени за кодове в полиномиални метрични пространства в [8].

Работата [6] има 5 независими цитирания в Скопус, а предхождащата я работа [16], където границата (1) е анонсирана, има 6 независими цитирания в Скопус.

2.2. Polarization bounds

В работата [19] от 2023 г. за пръв път са получени универсални граници за поляризацията на сферични кодове и дизайни, като един от централните резултати е следната теорема.

Теорема 3.4 ([19, Theorem 3.4, Corollary 3.9]) *Suppose C is a spherical τ-design of cardinality N on $\mathbb{S}^{n-1}$, where $\tau =: 2k - 1 + \epsilon$, $\epsilon \in \{0, 1\}$, and that the potential h is continuous on $[-1, 1]$,* *finite on $(-1,1)$, and has a nonnegative derivative $h^{(2k+\epsilon)}$ on $(-1,1)$. Then*

$$m^h(C) \geq N \sum_{i \in I} \rho_i h(\alpha_i), \tag{2}$$

where the index set I, the quadrature nodes $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, and the positive weights $\{\rho_i\}_{i\in I}$ are determined as follows: $I := \{1-\epsilon, \ldots, k\}$, $\{\alpha_j\}_{j\in I}$ are the zeros of the (possibly adjacent) Gegenbauer polynomials $(1+t)^\epsilon P_k^{(0,\epsilon)}(t)$, the weights $\{\rho_i\}_{i\in I}$ are positive, sum to 1, and are given by

$$\rho_i := \int_{-1}^{1} \ell_i(t)\, d\mu_n(t) = \int_{-1}^{1} \ell_i^2(t)\, d\mu_n(t), \tag{3}$$

where $\ell_i(t)$ denotes the Lagrange basic polynomials associated with the nodes $\{\alpha_i\}_{i\in I}$.

Moreover, the bound (2) is the best that can be attained by linear programming via polynomials f of degree at most τ for which $f \leq h$ on $[-1,1]$.

In addition, if a spherical τ-design C, $|C| = N$, attains the bound (2), then there exists a point $\widetilde{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ such that the set $I(\widetilde{x}, C)$ of all inner products between $\widetilde{x}$ and the points of C coincides with the set $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, and the multiplicities of these inner products are $\{N\rho_i\}_{i\in I}$, respectively. In particular, the numbers $N\rho_i$, $i \in I$, are positive integers.

Работата [19] вече получи 4 независими цитирания в Скопус. Работата в това направление продължава, като са предложени за публикуване 3 статии, 2 от които в напреднал процес на рецензиране. Доказана е оптималността на голям брой кодове в различни задачи за поляризация. Предстои пренасянето и обобщаването на тези резултати в полиномиални метрични пространства.

3. Изследвания на кодове и дизайни в полиномиални метрични пространства.

В серия от работи (номера [64,62,60,56,54-43,41-38,31-29,22,20-19,16,14-10,5-4] от списъка с работи по конкурса) са разгледани задачи, свързани със структурата на оптимални и близки до оптималните кодове и дизайни в различни пространства. Предложени са [64,62,60,56,54,40-38,30,6] и са приложени методи за пресмятане на спектри (разпределение на разстоянията) на такива кодове и дизайни, като резултатите дават важни характеризации [62,60,56,54,40-39,29,10,6-4], а в някои случаи и нови резултати за несъществуване [64,54-52,48,44-43,41,39,30,19,16]. Намерено е [64] симетричното контактно число $\tau_5 = 40$ (този резултат от 1993 дори и досега не е повторен от новите методи за полуопределено оптимиране, които достигат само до 42 като горна граница). Доказана е [49] единствеността на 11-дизайна със 120 точки в 4-мерното евклидово пространство (вж. също [50]). Получени са характеризации на нелинейни кодове с две разстояния [22,14,10,5], които допълват известните такива за линейни кодове.

За важността на тези резултати свидетелства казаното в книгата Algebraic Combinatorics (Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, Tatsuro Ito, Rie Tanaka), De Gryuter 2021: "Besides, there are works of Boyvalenkov [105] and his school to improve the Fisher type lower bound for t-designs

([106, 107, 108, 104, 378]).... ...As subsequent developments, there are some works by the group of Boyvalenkov [107, 108, 109] ... ".

Литература

[1] P. Boyvalenkov, D. Danev, S. Bumova, Upper bounds on the minimum distance of spherical codes, *IEEE Transactions on Information Theory* 42, 1996, 1576-1581.

[2] P. Boyvalenkov, Extremal polynomials for obtaining bounds for spherical codes and designs, *Discrete and Computational Geometry* 14, 1995, 167-183.

[3] P. Boyvalenkov, D. Danev, On linear programming bounds for codes in polynomial metric spaces, *Problemy Peredachi Informatsii* 34(2), 1998, 16-31 (in Russian); English translation in *Problems of Information Transmission* 34(2), 1998, 108-120.

[4] V. I. Levenshtein, Universal bounds for codes and designs, *Handbook of Coding Theory*, V. S. Pless and W. C. Huffman, Eds., Elsevier, Amsterdam, 1998, Ch. 6, 499–648.

[5] Th. Ericson, V. Zinoviev, *Codes on Euclidean Spheres*, North-Holland Mathematical Library, Elsevier, 2001.

[6] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Universal lower bounds for potential energy of spherical codes, *Constructive Approximation* 44, 2016, 385-415.

[7] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Energy bounds for codes and designs in Hamming spaces, *Designs, Codes and Cryptography* 82(1), 2017, 411-433 (arXiv:1510.03406v2).

[8] P. Boyvalenkov,P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Energy bounds for codes in polynomial metric spaces, *Analysis and Mathematical Physics* 9(2), 2019, 781-808 (arXiv:1804.07462).

[9] H. Cohn, M. de Courcy-Ireland, The Gaussian core model in high dimensions, Duke Mathematical Journal 167, 2018, 2417-2455 (arXiv:1603.09684).

[10] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Bounds for spherical codes: the Levenshtein framework lifted, *Mathematics of Computation* 90(329), 2021, 1323-1356 (arXiv:1906.03062).

[11] H. Cohn, A. Kumar, Universally optimal distribution of points on spheres, *J. Amer. Math. Soc.* 20, 2007, 99-148.

[12] S. V. Borodachov, D. P. Hardin, E. B. Saff. *Discrete Energy on Rectifiable Sets*, Springer Monographs in Mathematics, New York, 2019.

[13] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Upper bounds for energies of spherical codes with given cardinality and separation, *Designs, Codes and Cryptography*, 88, 2020, 1811-1826 (arXiv:1909.00981).

[14] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova. On spherical codes with inner products in prescribed interval, *Designs, Codes and Cryptography* 87, 2019, 299-315.

[15] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, Universal bounds for size and energy of codes of given minimum and maximum distances, *IEEE Transactions on Information Theory*, 67 (6, part 1 – dedicated to Vladimir I. Levenshtein), 2021, 3569-3584 (arXiv:1910.07274).

[16] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova. Universal upper and lower bounds on energy of spherical designs, *Dolomites Res. Notes Approx.* 8, 2015, 51-65.

[17] N. Sardari, M. Zargar, New upper bounds for spherical codes and packings, Math. Ann. (2023), 10.1007/s00208-023-02738-z (arXiv:2001.00185v3).

[18] Conway, J. H., Sloane, N. J. A., Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer Verlag, New York, 1988.

[19] P. Boyvalenkov, P. Dragnev, D. Hardin, E. Saff, M. Stoyanova, On polarization of spherical codes and designs, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 524(2), art. 127065 (29 pages), 2023 (arXiv:2207.08807).