Кратка авторска справка на Николай Николов

Основната част от работите на автора се отнасят до едни от най-важните области на многомерния комплексен анализ: инвариантни разстояния и метрики (аналитични свойства и оценки), и комплексно изпъкнали и псевдоизпъкнали области (аналитично и геометрично характеризиране). Тези две направления се преплитат в изследванията му, посветени на т. нар. симетризиран полидиск, който възниква естествено в задачи от теория на контрола. Някои от получените резултати намират приложения както в една от централните теми на комплексния анализ, а именно продължаване на холоморфни функции и изображения, така и в други области на математиката като теория на (плюри)потенциала и геометрията (изпъкнала, метрична и диференциална).

В част от работите се дават отговори на отворени въпроси и/или се поставят нови въпроси, а в други се обобщават известни резултати, като при това доказателствата са (значително) по-кратки и по-лесни. Това се дължи главно на геометричния подход към немалко от задачите.

По-долу са приведени някои от по-основните резултати на автора. Част от тях са докладвани и от други учени и докторанти на различни семинари по света и най-вече на семинара по комплексен анализ и семинара по геометрична теория на функциите на Ягелонския университет в Краков.

Инвариантни функции, разстояния, метрики и ядра

• В [32] са намерени универсални оценки за метриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман, както и за ядрото на Бергман, на произволна $\mathbb{C}$-изпъкнала област, несъдържаща комплексни прави (вж. [22] за изпъкналия случая); в частност, от тях следва, че $(*)$ трите метрики съвпадат с точност до константа, зависеща само от размерността на областта. Тези оценки обобщават резултати на Дж. Д. Макнийл [McN2, McN3], Дж.-Х. Чен [Che], Ст. Блумберг [Blu], М. Лидер [Lie] и други автори, които налагат допълнителните изисквания за (изпъкналост), ограниченост, гладкост и краен тип на областта, като при това съответните константи не са универсални. Възроденият интерес към $\mathbb{C}$-изпъкналите области в последните години е тясно свързан с работата на автора [31].

• Установяването на споменатите по-горе оценки се базира на използването на т. нар. *минимален базис,* въведен в [22] (вж. също [28]). Този базис е близък по смисъл до друг базис – максимален, въведен за същите цели, но в по-частни случаи и по друг начин, от Дж.-Х. Чен [Che] и Дж. Д. Макнийл [McN1]. В [28] е намерен естествен контрапример за основното свойство на максималния базис, което показва, че неговото прилагане от тези и други автори е некоректно. От друга страна, получените оценки в [32], заедно с комбинаторни разсъждения, се използват в [28] за коригиране на част от съответните доказателства. Детайлно изследване на този и съответния максимален базис е направено от автора в [6], където са намерени най-добрите константи, които зависят само от съответната размерност.

• В [9] е доказана локалната липшицовост на метриките на Каратеодори от по-висок ред на хиперболична по Каратеодори (в частност, на ограничена) област. Доказано е още, че метриката на Каратеодори от безкраен ред съвпада с метриката на Азукава върху произволна строго хиперизпъкнала област (и значи тези метрики са непрекъснати), което прецизира резултат на Ст. Нивош [Niv].

• В [26] е доказана локалната липшицовост на функцията на Лемперт и плюрикомплексната фунцкия на Грийн, както и на техните инфинитезимални форми – метриките на Кобаяши и на Азукава, за широки класове от области, включващи строго псевдоизпъкналите области. Тези изследвания бяха използвани и продължени от Гр. Херборт [Her] за псевдоизпъкнали области от краен тип.

• В [24] е установена е монотонноста на обобщената функция на Лемперт при добаване на полюси. Това отговаря положително на въпрос на Фр. Викстрьом [Wik2] и обобщава негов резултат за изпъкнали области [Wik1].

• В [23] е намерен минималният ред на метрика на Кобаяши, при който тя съвпада с метриката на Кобаяши–Буземан. По този начин се оптимизира резултат на С. Кобаяши [Kob].

• В [4] е намерено точното гранично поведение на метриките на Сибони и Кобаяши–Буземан около произволна непсевдоизпъкнала точка на област в $\mathbb{C}^n$, което разширява резултат на Дж. Е. Форнес и Л. Ли [FL]. За целта се въвежда и изучава нова инвариантна метрика (*DNT-псевдометрика* съгласно терминологията в [JP2]).

• В [14] е доказано, че разстоянията на Каратеодори, Кобаяши и Бергман са сравними с функцията на Лемперт върху произволна строго псевдоизпъкнала област. С това се потвърждава хипотеза на З. Балог и М. Бонк [BB], като същевременно се усилва техен резултат. В [16] резултатът от [14] е прецизиран, като са намерени точните оценки.

• В [27] е намерена оптимална оценка отгоре (за граничното поведение) на функцията на Лемперт на ограничена област с $\mathcal{C}^{1,\varepsilon}$-гладка граница, откъдето веднага следва подобен резултат на Фр. Форстнерич и Ж.-П. Розе [FR] за разстоянието на Кобаяши.

• В [5] са получени количествени строго локализационни резултати за метриките на Кобаяши, Азукава и Сибони около плюрисубхармонична пик-точка на произволна област в $\mathbb{C}^n$, което съществено разширява резултат на Фр. Форстнерич и Ж.-П. Розе [FR] за метриката на Кобаяши.

• Съществено прецизиране на споменатия резултат от [FR] е получено в [17]. За целта е привлечено квазихиперболичното разстояние, което играе важна роля в теорията на квазиконформните изображения. В [17] и [35] е намерено точното гранично поведение на това разстояние около $\mathcal{C}^{1,1}$-гладка гранична точка на област в $\mathbb{R}^n$. То се изразява само чрез евклидовото разстояние между съответните точки и техните разстояния до границата на областта. Този резултат е използван в изследванията на редица автори като Х. Ванг, М. Вуоринен, А. Расила и др. Въведената в [17] помощна метрика е наречена в [LRWZ] *метрика на Николов-Андреев*.

• Използвайки L_2 оценките с тегла за $\overline{\partial}$-задачата, Л. Хьормандер [Hor] доказва локализационно свойство на ядрото на Бергман около строго псевдоизпъкнала точка на ограничена псевдоизпъкнала област. Модифицирайки подхода от [Hor], в [10] е доказано, че условието за ограниченост е излишно. В [10] е получено и локализационно свойство за метриката на Бергман.

• В [13] е доказано, че ядрата на Бергман и Сегьо са сравними върху произволна $\mathbb{C}$-изпъкнала област, с което се обобщава резултат на Б.-Й. Чен и С. Фу [CF] за изпъкнала област.

Притискащата функция

• Отбелязаният в началото важен факт $(*)$ следва и от получения по-късно резултат от автора в [18] (доказан пак с помощта на минимален базис), а именно, че т. нар. притискаща функция на произволна $\mathbb{C}$-изпъкнала област, несъдържаща комплексни прави, е ограничена отдолу от положителна константа, и то зависеща само от размерността на областта. Това обобщава резултат на К.-Т. Ким и Л. Жанг [KZ]. Явна такава константа е намерена наскоро от автора в [1]. Класът от области D, за които съществува съответна константа $c_D > 0$ е въведен от К. Лиу, Х. Сун и Ш.-Т. Яу, а различни свойства на притискащата функция изучават интензивно през последните години от К. Дидрих, Дж. Е. Форнес, Е. Ф. Волд, А. Цимер, Ф. Денг и други автори.

• Едно от тези свойства е, че притискащата функция клони към 1, когато нейният аргумент клони към границата на строго псевдоизпъкнала област [DGF]. В [FW] е поставен въпросът дали обратното е вярно, т.е. дали ако една ограничена $\mathcal{C}^{\infty}$-гладка псевдоизпъкнала област има това свойство, то тя непременно е строго псевдоизпъкнала. В [JK] и [Zim3] е даден положителен отговор на този въпрос съответно за области от краен тип (в смисъл на Д'Анжело) в $\mathbb{C}^2$ и за изпъкнали области в $\mathbb{C}^n$. Резултатът от [JK] е обобщен от автора в [15] (чрез различен подход, базиран на граничното поведение на псевдообемите на Каратеодори-Айзенман и Кобаяши-Айзенман). По-точно, горният въпрос има положителен отговор в класа на областите от полуправилен тип, т.е. такива за които мултитипове на Д'Анжело и Катлин са крайни и съвпадат. Ще отбележим, че към този клас принадлежат областите от краен тип в $\mathbb{C}^2$ и изпъкналите области от краен тип в $\mathbb{C}^n$. Изследванията от [15] са продължени от Г. Бхарали, Д. Борах, Д. Кар и други автори.

• В [39] е доказано, че притискащата функция не надминава инвариантата на Фридман и са получени локализационни резултати за тези две функции. Това неравенство се прилга от редица автори като Ф. Ронг, С. Янг, Ф. Денг и други автори.

• В [38] са получени оценки отдолу за притискащата функция чрез разстоянието до границата на строго псевдоизпъкнала област. Това разширява резултат на Дж. Е. Форнес и Е. Ф. Уолд, когато границата е C^4-гладка и отговаря на техен въпрос при по-ниска регулярност [FW].

Геодезични на разстоянието на Кобаяши

Следните работи на автора от последните три години са свързани с изучаване на геодезични на разстоянието на Кобаяши и тяхната връзка с хиперболичността по Громов спрямо това разстояние: [2, 3, 7, 8, 19, 20, 21].

• В [2] е показано, че комбинацията от „видимостта“ на реалните геодезични на разстоянието на Кобаяши и хиперболичността по Громов на пълна област в $\mathbb{C}^n$ спрямо това разстояние има локален характер.

• В [3] е доказана тази видимост за ограничени гладки изпъкнали области от краен тип в $\mathbb{C}^n$. Намерено е необходимо и достатъчно условие за видимостта в термините на компактификацията по Громов.

• В [8] е доказано, че за $C^{2,\varepsilon}$-гладка строго псевдоизпъкнала област с точност до мултипликативна константа дължините на реалните геодезични на разстоянието на Кобаяши между всеки две точки не надминават евклидовото разстояние между тези точки. В случая на квази-хиперболичното разстояние това е известно като теорема Геринг-Хайман. По-слаба оценка с квадрата на разстоянието е получена в [LPW].

• В [7] резултат на Х. Хуанг [Hua1, Hua2] за граничното поведение на комплексните геодезични на метриката на Кобаяши на $C^{2,\varepsilon}$-гладка строго псевдоизпъкнала област е доказан за комплексните геодезични на разстоянието на Кобаяши (което влече и резултата на Х. Хуанг). Като следствие е получена оценка отдолу за това разстояние.

Комплексно изпъкнали и псевдоизпъкнали области

• В [29] и [33] е получена характеризация съответно на псевдоизпъкналите и $\mathbb{C}$-изпъкналите области чрез максималните им балансирани подобласти. В [29] е доказано още, че всяка слабо локално (комплексно) линейно изпъкнала област е псевдоизпъкнала, което дава положителен отговор на въпрос на Д. Жаке [Jac].

• Известният от средата на миналия век резултат за двумерната характеризация на псевдоизпъкналостта е усилен в [25] (вж. също [34]) в случая на отворено множество в $\mathbb{C}^n$ с $\mathcal{C}^{1,1}$-гладка граница, като е доказано, че такова множество е псевдоизпъкнало тогава и само тогава, когато всяко негово сечение с двумерна комплексна равнина през началото е псевдоизпъкнало. Изследванията в тази посока бяха използвани и продължени от Е. Портен [Por] за области с негладки граници, като бе даден положителен отговор на въпрос от [25].

• В [11] е доказана бихоломорфната еквивалентност на всеки два модела на област в $\mathbb{C}^n$ около полуправилна гранична точка. Това инспирира подобни резултати на М. Колар [Kol1, Kol2], свързани с геометрията на повърхнини от краен тип.

• Доказана е (не)хиперболичност по Громов относно разстоянието на Кобаяши за различни класове от области [36, 37]. Изследванията в случая на ($\mathbb{C}$-)изпъкнали области бяха продължени и разширени от А. Цимер [Zim1, Zim2], М. Фиаки [Fia] и други автори.

Симетризираният полидиск

• В [31] е намерен пример на ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област, а именно симетризираният бидиск, която не може да бъде изчерпана с области, бихоломорфни на изпъкнали области (което възроди интереса към $\mathbb{C}$-изпъкналите области). Това дава положителен отговор на въпрос на С. В. Знаменский [Зна] (вж. също [Zna]). Идеята за анализиране на $\mathbb{C}$-изпъкналостта на симетризирания бидиск се появява за първи път в работата на автора [31] с цел да обясни защо теоремата на Лемперт (за разстоянията и метриките на изпъкнали области) е в сила и за тази област (която не е изпъкнала). Комбинацията от подобна идея и въведеното в [12] понятие за *d-балансирана област* (съгласно терминологията в [JP2]; вж. също [GP]) е използвана по-късно и от Т. Варшавски, А. Едигарян, П. Запаловски, Л. Косински, С. Пал, С. Рой и други автори при изучаването на симетризирания полидиск тетраблока и пентаблока, както и от А. Цимер в работи по комплексна геометрия.

• В [30] е доказано, че разлика от симетризирания бидиск, теоремата на Лемперт не е в сила за симетризирания полидиск в по-високи размерности, което дава положителен отговор на въпрос на М. Ярницки и П. Пфлуг [JP1]. По-точно, доказано е, че функцията на Лемперт за тази област не е разстояние. Във връзка с обратен резултат е установено още, че декартовото произведение на симетризирания бидиск и балансирана област не е бихоломорфно на изпъкнала област. В [Edi] е доказано, че условието за балансираност е излишно, с което се дава отговор на въпрос от [30].

• В [40] е доказано, че за разлика от симетризирания бидиск, симетризирания полидиск в по-високи размерности не е област на Лу Ки-Кенг (т.е. неговото ядро на Бергман има нули). Това дава положителен отговор на въпрос на М. Ярницки и П. Пфлуг [JP1].

Литература

[1] G. Bharali, N. Nikolov, *Explicit universal bounds for squeezing functions of ($\mathbb{C}$-)convex domains*, Int. J. Math. 35 (2024), article ID: 2450031, 12 p.

[2] F. Bracci, H. Gaussier, N. Nikolov, P. J. Thomas, *Local and global visibility and Gromov hyperbolicity of domains with respect to the Kobayashi distance*, Trans. Amer. Math. Soc. 377 (2024), No 1, 471-493.

[3] F. Bracci, N. Nikolov, P. J. Thomas, *Visibility of Kobayashi geodesics in convex domains and related properties*, Math. Z. 301 (2022), No 2, 2011-2035.

[4] N. Q. Dieu, N. Nikolov, P. J. Thomas, *Estimates for invariant metrics near non-semipositive boundary points*, J. Geom. Anal. 23 (2013), 598-610.

[5] J. E. Fornæss, N. Nikolov, *Strong localization of invariant metrics*, Math. Ann. 383 (2022), No 1-2, 353-360.

[6] St. Gerdjikov, N. Nikolov, *Some sharp inequalities for norms in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}^n$*, Monatsh. Math. (accepted).

[7] L. Kosinski, N. Nikolov, *Lower estimates of the Kobayashi distance and limits of complex geodesics*, Math. Ann., doi:10.1007/s00208-023-02694-8.

[8] L. Kosinski, N. Nikolov, P. J. Thomas, *A Gehring-Hayman inequality for strongly pseudoconvex domains*, Int. Math. Res. Not., doi:10.1093/imrn/rnae017.

[9] Н. Николов, *Непрерывность и граничное поведение метрики Каратеодори*, Математические заметки 67 (2000), 230-240. English translation: N. Nikolov, *Continuity and boundary behavior of the Carathéodory metric*, Math. Notes 67 (2000), 183-191.

[10] N. Nikolov *Localization of invariant metrics*, Arch. Math. 79 (2002), 67-73.

[11] N. Nikolov, *Biholomorphy of the model domains at a semiregular boundary point*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. 55 (2002), No 5, 5-8.

[12] N. Nikolov, *The symmetrized polydisc cannot be exhausted by domains biholomorphic to convex domains*, Ann. Polon. Math. 88 (2006), 279-283.

[13] N. Nikolov, *Estimates of invariant metrics on "convex" domains*, Ann. Mat. Pura Appl. 193 (2014), 1595-1605.

[14] N. Nikolov, *Comparison of invariant functions on strongly pseudoconvex domains*, J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), 180-185.

[15] N. Nikolov, *Behavior of the squeezing function near h-extendible boundary points*, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), 3455-3457.

[16] N. Nikolov, *Comparison and localization of invariant functions on strongly pseudoconvex domains*, Bull. London Math. Soc. 55 (2023), No 4, 2052-2061.

[17] N. Nikolov, L. Andreev, *Estimates of the Kobayashi and quasi-hyperbolic distances*, Ann. Mat. Pura Appl. 196 (2017), 43-50.

[18] N. Nikolov, L. Andreev, *Boundary behavior of the squeezing functions of* $\mathbb{C}$*-convex domains and plane domains*, Int. J. Math. 28 (2017), Article ID: 1750031, 5 p.

[19] N. Nikolov, A. Y. Ökten, *Strongly Goldilocks domains, quantitative visibility, and applications*, J. Math. Anal. Appl. 534 (2024), No 2, 128130.

[20] N. Nikolov, A. Y. Ökten, *Strong localizations of the Kobayashi distance*, Proc. Amer. Math. Soc. 152 (2024), No 6, 2439-2448.

[21] N. Nikolov, A. Y. Ökten, P. J. Thomas, *Local and global notions of visibility with respect to Kobayashi distance, a comparison*, Ann. Pol. Math. 132 (2024), No 2, 169-185.

[22] N. Nikolov, P. Pflug, *Estimates for the Bergman kernel and metric of convex domains in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Polon. Math. 81 (2003), 73-78.

[23] N. Nikolov, P. Pflug, *On the definition of the Kobayashi-Buseman pseudometric*, Int. J. Math. 17 (2006), 1145-1149.

[24] N. Nikolov, P. Pflug, *The multipole Lempert function is monotone under inclusion of pole sets*, Mich. Math. J. 54 (2006), 111-116.

[25] N. Nikolov, P. Pflug, *Two-dimensional slices of non-pseudoconvex open sets*, Math. Z. 272 (2012), 381-388.

[26] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas, *Lipschitzness of the Lempert and Green functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009).

[27] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas, *Upper bound for the Lempert function of smooth domains*, Math. Z. 266 (2010), 425-430.

[28] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas, *On different extremal bases for* $\mathbb{C}$*-convex domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 3223-3230.

[29] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas, W. Zwonek, *On a local characterization of pseudoconvex domains*, Indiana Univ. Math. J. 58 (2009), 2661-2671.

[30] N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek, *The Lempert function of the symmetrized polydisc in higher dimensions is not a distance*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2921-2928.

[31] N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek, *An example of a bounded* $\mathbb{C}$*-convex domain which is not biholomorphic to a convex domain*, Math. Scand. 102 (2008), 149-155.

[32] N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek, *Estimates for invariant metrics on* $\mathbb{C}$*-convex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 6245-6256.

[33] N. Nikolov, P. J. Thomas, *"Convex" characterizations of linearly convex domains*, Math. Scand. 111 (2012), 179-186.

[34] N. Nikolov, P. J. Thomas, *Rigid characterizations of pseudoconvex domains*, Indiana Univ. Math. J. 61 (2012), 1313-1323.

[35] N. Nikolov, P. J. Thomas, *Boundary behavior of the quasi-hyperbolic metric*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 43 (2018), 381-389.

[36] N. Nikolov, P. J. Thomas, M. Trybula, *Gromov (non)hyperbolicity of certain domains in* $\mathbb{C}^2$, Forum Math. 28 (2016), 783-794.

[37] N. Nikolov, P. J. Thomas, M. Trybula,*Gromov hyperbolicity of the Kobayashi metric on* $\mathbb{C}$*-convex domains*, J. Math. Anal. Appl. 486 (2018), No 2, 1164-1178.

[38] N. Nikolov, M. Trybuła, *Estimates for the squeezing function near strictly pseudoconvex boundary points with applications*, J. Geom. Anal. 30 (2020), No 2, 1359-1365.

[39] N. Nikolov, K. Verma, On the squeezing function and Fridman invariant J. Geom. Anal. 30 (2020), No 2, 1218-1225.

[40] N. Nikolov, W. Zwonek, *The Bergman kernel of the symmetrized polydisc in higher dimensions has zeros*, Arch. Math. 87 (2006), 412-416.

[BB] Z. M. Balogh, M. Bonk, *Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains*, Comment. Math. Helv. 75 (2000), 504-533.

[Blu] S. Blumberg, *Das Randverhalten der Bergman-Kerns und der Bergman-Metrik auf lineal konvexe Gebieten endlichen Typs*, Dissertation, Universität Wuppertal, 2005.

[CF] B.-Y. Chen, S. Fu, *Comparison of the Bergman and Szegö kernels*, Adv. Math. 228 (2011), 2366-2384.

[Che] J.-H. Chen, *Estimates of the invariant metrics on convex domains*, Ph. D. dissertation, Purdue University, 1989.

[DGF] F. Deng, Q. Guan, L. Zhang, *Properties of squeezing functions and global transformations of bounded domains*, Tran. Amer. Math. Soc. 368 (2016), 2679-2696.

[Edi] A. Edigarian, *Balanced domains and convexity*, Arch. Math. 101 (2013), 373-379.

[Fia] M. Fiacchi, *Gromov hyperbolicity of pseudoconvex finite type domains in* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann. 382 (2022), 37–68.

[FL] J. E. Fornaess, L. Lee, *Kobayashi, Carathéodory, and Sibony metrics*, Complex Var. Elliptic Equ. 54 (2009), 293-301.

[FW] J. E. Fornaess, E. F. Wold, *A non-strictly pseudocon vex domain for which the squeezing function tends to one towards the boundary*, Pacific J. Math. 297 (2018), 79-86.

[FR] F. Forstnerič, J.-P. Rosay, *Localization of the Kobayshi metric and the boundary continuity of proper holomorphic mappings*, Math. Ann. 279 (1987), 239-252.

[GP] N. Gupta, S. K. Pant, *d-balanced squeezing function*, Complex Var. Elliptic Equ. 68 (2023), 619-631.

[Her] G. Herbort, *The pluricomplex Green function on some regular pseudoconvex domains*, Ann. Polon. Math. 110 (2014), 209-226.

[Hor] L. Hörmander, L^2 *estimates and existence theorems for* $\overline{\partial}$ *operator*, Acta Math. 113 (1965), 89-152.

[Hua1] X. Huang, *A non-degeneracy property of extremal mappings and iterates of holomorphic selfmappings*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) XXI (1994), 399-419.

[Hua2] X. Huang, *Revisiting a non-degeneracy property for extremal mappings*, Acta Math. Sci. 418 (2021), 1829-1838.

[Jac] D. Jacquet, *On complex convexity*, Ph.D. thesis, Stockholm, 2008.

[JP1] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis-revisited*, Diss. Math. 430 (2005), pp. 192.

[JP2] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis - 2nd extended edition*, Walter de Gruyter, 2013.

[JK] S. Joo, K.-T. Kim, *On boundary points at which the squeezing function tends to one*, J. Geom, Anal. (2017), DOI 10.1007/s12220-017-9910-4.

[KZ] K.-T. Kim, L. Zhang, On the uniform squeezing property of bounded convex domains in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. Math. 282 (2016), 341-358.

[Kob] S. Kobayashi, *A new invariant infinitesimal metric*, Int. J. Math. 1 (1990), 83-90.

[Kol1] M. Kolar, *Higher order invariants of Levi degenerate hypersurfaces*, Pure and Applied Mathematics Quarterly 6 (2010), 1035-1050.

[Kol2] M. Kolar, *The Catlin multitype and biholomorphic equivalence of models*, Internat. Math. Res. Notices 2010 (2010), 3530-3548.

[Lie] M. Lieder, *Das Randverhalten der Kobayashi und Carathéodory-Metrik auf lineal konvexe Gebieten endlichen Typs*, Dissertation, Universität Wuppertal, 2005.

[LPW] , Liu, X. Pu, H. Wang, *Bi-Hölder extensions of quasi-isometries on pseudoconvex domains of finite type in* $\mathbb{C}^2$, J. Geom. Anal. 33 (2023), 152.

[LRWZ] Q. Luo, A. Rasila, Y. Wang, Q. Zhou, The Nikolov-Andreev metric and Gromov hyperbolicity, Mediterr. J. Math. 21 (2024), article numbr 105, 14 p.

[McN1] J. D. McNeal, *Convex domains of finite type*, J. Funct. Anal. 108 (1992), 361-373.

[McN2] J. D. McNeal, *Estimates on the Bergman kernels of convex domains*, Adv. Math. 109 (1994), 108-139.

[McN3] J. D. McNeal, *Invariant metric estimates for* $\overline{\partial}$ *on some pseudoconvex domains*, Ark. Mat. 39 (2001), 121-136.

[Niv] St. Nivoche, *The pluricomplex Green function, capacitative notions, and approximation problems in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. 44 (1995), 489-510.

[Por] E. Porten, *Two-dimensional slices of nonpseudoconvex domains with rough boundary*, Math. Z. 278 (2014), 19-23.

[Wik1] F. Wikström, *Non-linearity of the pluricomplex Green function*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 1051–1056.

[Wik2] F. Wikström, *Qualitative properties of biholomorphically invariant functions with multiple poles*, preprint, 2004.

[Zim1] A. M. Zimmer, *Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on convex domains of finite type*, Math. Ann. 365 (2016), 1425-1498.

[Zim2] A. M. Zimmer, *Gromov hyperbolicity, the Kobayashi metric, and* $\mathbb{C}$*-convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), 8437-8456.

[Zim3] A. Zimmer, *Characterizing strong pseudoconvexity, obstructions to biholomorphisms, and Lyapunov exponents*, arXiv:1703.01511.

[Зна] С. В. Знаменский, *Семь задач о* $\mathbb{C}$*-выпуклости*, В кн.: Комплексный анализ в совремнной математике. К 80-летию со дня рождения Бориса Владимировича Шабата, Е. М. Чирка (ред.), Москва: ФАЗИС, 2001, стр. 123-131.

[Zna] S. V. Znamenskij, *The closure and the interior of* $\mathbb{C}$*-convex sets*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 12 (2019), 475-482.